Plan du cours

1. **Introduction + Calcul différentiel**
2. **Exercices de Calcul différentiel (3h de TD)**
3. $\boxed{\textbf{Théorie générale des ED :} \quad x'(t) = f(x(t))}$
4. **Cas linéaire autonome :** $x'(t) = Ax(t)$
5. **Linéarisation & ED linéaires non autonomes :**
   $\delta x' = Df(x(t)) \cdot \delta x$ **&** $x'(t) = A(t)x(t)$
6. **Équilibres et stabilité,**
   $x' = f(x)$ **vs** $\delta x' = Df(x_0) \cdot \delta x$

Existence et unicité

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad (ED)$$

Données :

- Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$,
- $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continue *[champ de vecteurs]*

Solution = fonction $x(\cdot) : J \to \mathbb{R}^n$ dérivable t.q.

- J intervalle de $\mathbb{R}$,
- $x(J) \subset \Omega$,
- $\forall t \in J, \quad x'(t) = f(x(t))$.

Existence et unicité locales

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Hyp : f est C^1 sur Ω.

Soient $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$. *Il existe* $\delta > 0$ *t.q. le système*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)), \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

a une **unique** *solution* $x(\cdot) :]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\to \Omega$.

- Cauchy-Lip. reste vrai si f **localement lipschitzienne**
- Si f seulement continue (théorème de Peano) :

  il existe une solution sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$

  MAIS pas forcément unique.

Intervalles de définition

Hyp : f de classe C^1

Proposition

Pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$,
il existe un intervalle **maximal** $]t_-, t_+[$ *sur lequel est défini la solution* $x(\cdot)$ *t.q.* $x(t_0) = x_0$ *(=* **solution maximale***).*

$\longrightarrow$ Si $y(\cdot) : J \to \Omega$ solution t.q. $y(t_0) = x_0$,
$J \subset]t_-, t_+[$ et $y(\cdot)$ restriction de $x(\cdot)$ à J.

$\longrightarrow$ t_- et t_+ = fonctions de (t_0, x_0), $\quad t_- < t_0 < t_+$

Durée de vie

Soit $x(\cdot) :]t_-, t_+[\to \Omega$ une solution maximale.

- Quand $\Omega = \mathbb{R}^n$,

$$t_+ < +\infty \quad \Longrightarrow \quad \|x(t)\| \to \infty \quad \text{quand } t \to t_+$$

  (idem si $t_- > -\infty$)

- $x(\cdot)$ contenu dans un compact $\Longrightarrow$ $]t_-, t_+[= \mathbb{R}$

(ED) **complète** si $]t_-, t_+[= \mathbb{R}$ pour toute solution maximale.

Orbites et portraits de phase

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad f \quad C^1 \text{ sur } \Omega \subset \mathbb{R}^n \qquad (ED)$$

Notation : Pour $v \in \Omega$,

$x_v(\cdot) \;=\;$ sol. maximale de (ED) t.q. $x_v(0) = v$, définie sur J_v

Déf : **L'orbite** de $v \in \Omega$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_v &= \{ \, x_v(t) \; : \; t \in J_v \, \} \\ &= \text{courbe tracée sur } \Omega \text{ par } x_v(\cdot) \end{aligned}$$

Portrait de phase de (ED) **=** tracé de toutes les orbites

But : comprendre le portrait de phase

Un outil : le flot

$$x'(t) = f(x(t)), \qquad f \quad C^1 \text{ sur } \Omega \qquad (ED)$$

Définition

Flot $=$ application

$$\phi_t : \; v \;\longmapsto\; x_v(t),$$

où $x_v(\cdot) \;=\;$ sol. maximale de (ED) t.q. $x_v(0) = v$.

$\longrightarrow$ 2 points de vue $\neq$ $\begin{cases} \text{solutions :} & t \mapsto x_v(t), \\ \text{flot :} & v \mapsto \phi_t(v). \end{cases}$

Pbe : $\phi_t(v)$ n'existe que si $t \in J_v$, où $J_v =$ int. de déf. de $x_v(\cdot)$

(sauf si (ED) complète : alors ϕ_t définie sur tout Ω, $\forall\, t$)

Proposition

Supposons $x_v(\cdot)$ définie sur $[0, t]$ $\quad (\Leftrightarrow \; t \in J_v)$.

Alors ϕ_t définie sur $\mathcal{V} \subset \Omega$ voisinage de v, et

$$\phi_t : \; \mathcal{V} \;\longrightarrow\; \phi_t(\mathcal{V}) \quad (= \textit{voisinage de } x_v(t))$$

est une bijection continue.

Autrement dit, $v \mapsto x_v(\cdot)$ est continue sur $\mathcal{V}$.

[dépendance continue / cond. initiales]

Propriétés du flot

Hyp : (ED) complète $\Longrightarrow$ ϕ_t défini sur tout Ω

- Pour tous $t \in \mathbb{R}$, $v \in \Omega$,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\phi_t(v) &= f(\phi_t(v)), \\ \phi_0(v) &= v. \end{cases}$$

- **Formule du flot :**

$$\forall\, t, s \in \mathbb{R}, \qquad \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s \qquad [\ \Rightarrow \quad \phi_t^{-1} = \phi_{-t}\ ]$$

Rappel : **L'orbite** de $v \in \Omega$ est

$$\mathcal{O}_v = \{\ x_v(t)\ :\ t \in J_v\ \} = \{\ \phi_t(v)\ :\ t \in J_v\ \}$$

Propriétés

- $w \in \mathcal{O}_v \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{O}_w = \mathcal{O}_v$
- 2 orbites $\neq$ ne se croisent pas.

$\longrightarrow$ 3 types d'orbites :

- Si $x_v(\cdot) \equiv v \quad (\Leftrightarrow\ f(v) = 0)$: $\qquad \mathcal{O}_v = \{v\}$ *[équilibre]*
- Si $\exists$ un point double : $x_v(\cdot)$ périodique et $\mathcal{O}_v$ = courbe fermée *[orbite périodique]*
- Si pas de points doubles sur $x_v(\cdot)$: $\quad \mathcal{O}_v$ = courbe ouverte